

[1] すべての実数 x を定義域とする 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ を考える.

(1) $f(x)$ の極大値は $\boxed{(1)}$ であり, 極小値は $\boxed{(2)}\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ である.

(2) $f(x) = 0$ を満たすどの実数 x よりも大きい整数のうちで, 最小のものは $\boxed{(5)}$ である.

(3) $r = \frac{5}{3}$ とおく. 3^r よりも小さい整数のうちで, 最大のものは $\boxed{(6)}$ である.

(4) 実数 t が $|t-1| \leq \frac{2}{3}$ を満たす範囲を動くとき, $3^{3t} - 3^{2t+1} - 3^{t+2}$ は $t = \frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}$

で最小値をとり, $t = \frac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}}$ で最大値をとる.

[2] 15 枚のカードがある．このうち 12 枚には 1, 2 枚には 5, 1 枚には 11 と、それぞれ表に印刷されている．このカードを裏返してよく混ぜた後に 1 枚ずつ順に 5 枚を取り出し、取り出したカードの表に印刷された 5 個の数字の合計を X とおく．また、残りの 10 枚に印刷された数字の合計を 2 で割った値を Y とおく．

(1) 最初に取り出した 1 枚のカードの数字の期待値は $\frac{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$ である．

(2) $X < 6$ となる確率は $\frac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}$ である．

(3) $X < Y$ となる確率は $\frac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}$ である．

(4) X の期待値と Y の期待値はともに $\boxed{(22)}\boxed{(23)}$ に等しい．

- [3] 座標空間の原点 $O(0, 0, 0)$, および 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ を考える.

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である. ただし, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル \vec{a} と \vec{b} の内積を表す.

- (2) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle ABC$ の面積を S_2 とするとき,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}}$$

である.

- (3) $\triangle OAB$ を含む平面を α とする. 点 C から平面 α へ下ろした垂線と α の交点を H とするとき, 線分 CH の長さは $\frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}}$ である.

- [4] (1) 不等式 $|x^2 - 4x| < x - 2$ を満たす実数 x の値の範囲を求めよ.
- (2) 等式 $|x^2 - 4x| = x + a$ を満たす実数 x がちょうど2つ存在する実数 a の値の範囲を求めよ.
- (3) 等式 $|x^2 - 4x| = bx$ を満たす 0 でない実数 x が存在する実数 b の値の範囲を求めよ.

[5] a と d を正の実数とし, $\{a_n\}$ を初項 a , 公差 d の等差数列とする. j と k を 1 以上の整数とし, $b_n = (a_{n+j})^2 - (a_n)^2$ と $c_n = (a_{n+k})^2 - (a_n)^2$ で数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{c_n\}$ を定めるとき, これらは等差数列になる.

(1) 数列 $\{b_n\}$ の公差を d と j を用いて表せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{c_n\}$ の公差がそれぞれ $9kd$ と $25jd$ のとき, k と j の比 $\frac{k}{j}$, および d を求めよ.

[6] すべての実数 x を定義域とする関数 $f(x) = |x^2 - 10x + 16|$ を考える.

(1) 定積分 $\int_0^4 f(x) dx$ を求めよ.

(2) 区間 $a \leq x \leq a + 8$ における $f(x)$ の最大値が 9 となる整数 a を求めよ.

(3) k を実数とする. A は $4 \leq x \leq 7$ を満たす実数 x の集合, B は $f(x) \leq k$ を満たす実数 x の集合とする. このとき, $A \subset B$ も $A \subset \overline{B}$ も成り立たない k の値の範囲を求めよ. ただし \overline{B} は実数全体の集合における B の補集合とする.